PARAGRAAF 2.1 : SNELHEDEN (EN HELLING)

LES 1 BENADERING VAN DE HELLING TUSSEN TWEE PUNTEN

DEFINITIES

- Differentiequotiënt = { Gemiddelde helling }
- Differentiequotiënt = { r.c. van de lijn door deze twee punten}
- Differentiequotiënt op interval [x_a , x_b] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$
- Helling = Snelheid (bijv. m/s)
- Soorten daling : blz. 50 boek.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

a. Bereken het differentiequotiënt op $[2,6]$

b. Bereken de gemiddelde helling / snelheid op $[-4,-1]$

OPLOSSING 1

a. Differentiequotiënt op interval $[2\,,6]$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_2}{x_6 - x_2} = \frac{39-7}{6-2} = \frac{32}{4} = 8$

Dit betekent dat als je één naar echts gaat, je met 8 omhoog gaat (r.c. van de lijn door deze twee punten)

b. Gemiddelde helling / snelheid op $[-4\,,-1]$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{-1} - y_{-4}}{x_{-1} - x_{-4}} = \frac{4-19}{-1+4} = \frac{-15}{3} = -5$

LES 2 BENADERING VAN DE HELLING IN EEN PUNT

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.
Bereken de helling in $x = 2$

OPLOSSING 1

Een goede benadering is om een heel klein interval rond x = 2 te nemen en het differentiequotiënt uit te rekenen dus bijvoorbeeld op interval [2 ; 2,01]
(Dan is ∆x=0,01) :

(1) Bereken bij beide x-en de y-waarden :

$x = 2 \rightarrow y = 2^2 + 3 = 7$ dus $A = (2,7)$

$x = 2{,}01 \rightarrow y = 2{,}01^2 + 3 = 7{,}0401$ dus $B = (2{,}01\ ;\ 7{,}0401)$

(2) Differentiequotiënt op interval $[2\ ;\ 2{,}01] =$

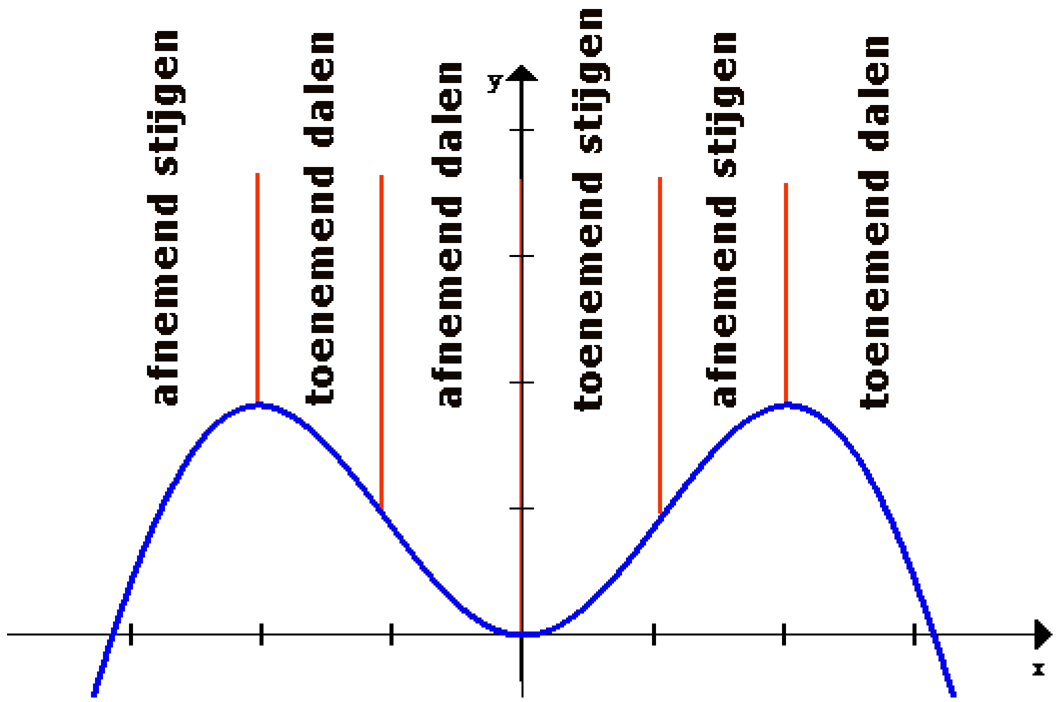
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{2,01} - y_2}{x_{2,01} - x_2} = \frac{7{,}0401 - 7}{0{,}01} = \frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01 \approx 4$$

(3) Dus de helling in $x = 2$ is 4.

VOORBEELD 2

Gegeven is onderstaande grafiek. Geef duidelijk aan op welk gebied de grafiek :
Toenemend stijgend
Afnemend stijgend
Toenemend dalend
Afnemend dalend is.

OPLOSSING 2



PARAGRAAF 2.2 : RAAKLIJNEN EN HELLINGGRAFIEKEN

LES 1 : RAAKLIJN OPSTELLEN

STAPPENPLAN RAAKLIJN BIJ X = … :

(1) Algemene vergelijking van een lijn (en dus ook van een raaklijn) → $y = ax + b$
(2) Bereken de y-coördinaat.
(3) Bereken de a = rc met knop dy/dx op GR.
(4) Bereken b door x, y en a in te vullen bij $y = ax + b$.
(5) Geef de vergelijking van de raaklijn.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$. Bepaal de raaklijn in x=3

OPLOSSING 1

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(3) = 19$

(3) $Y1 = 2x^2 - 3x + 10$
Calc → $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \rightarrow 3 \rightarrow a = 9$

(4) Je weet $y = 9x + b$
Je weet ook het punt $(3{,}19)$
Invullen geeft $19 = 9 \cdot 3 + b$
$b = -8$

(5) Dus raaklijn : $y = 9x - 8$.

LES 2 : VERBAND TUSSEN F(X) EN F ’(X)

DEFINITIES

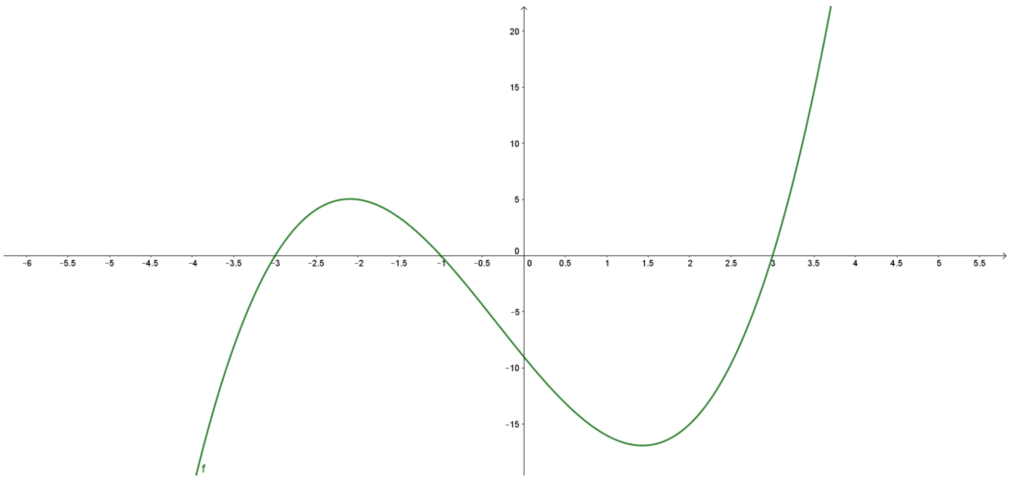
- $f'(x)$ $=$ { de hellinggrafiek van $f(x)$ }

VOORBEELD 1

Gegeven is de grafiek hierbeneden.

a. Stel dat is de grafiek van f(x). Teken op basis hiervan f’(x)

b. Stel dat is de grafiek van g’(x). Teken op basis hiervan g(x)



OPLOSSING 1

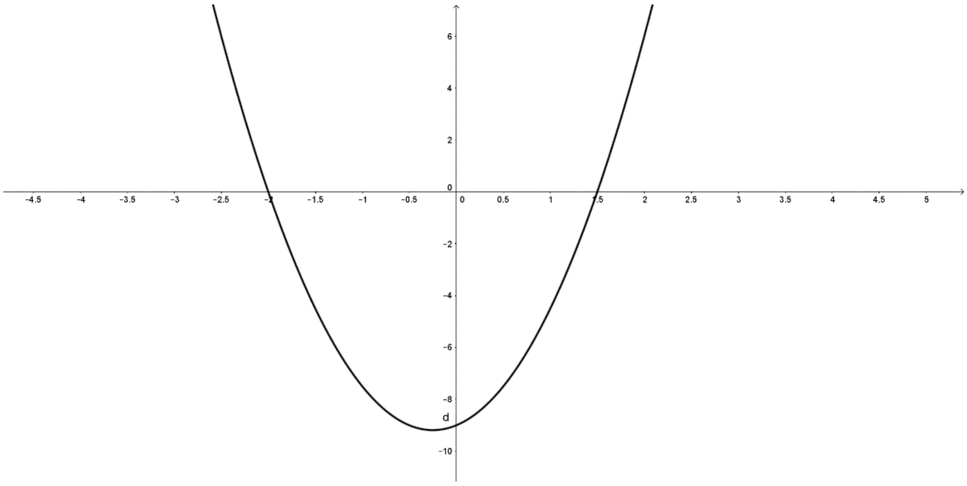
a. **(1)** In de toppen is f'(x) = 0. Dus bij x = -2 en x = 1,5.

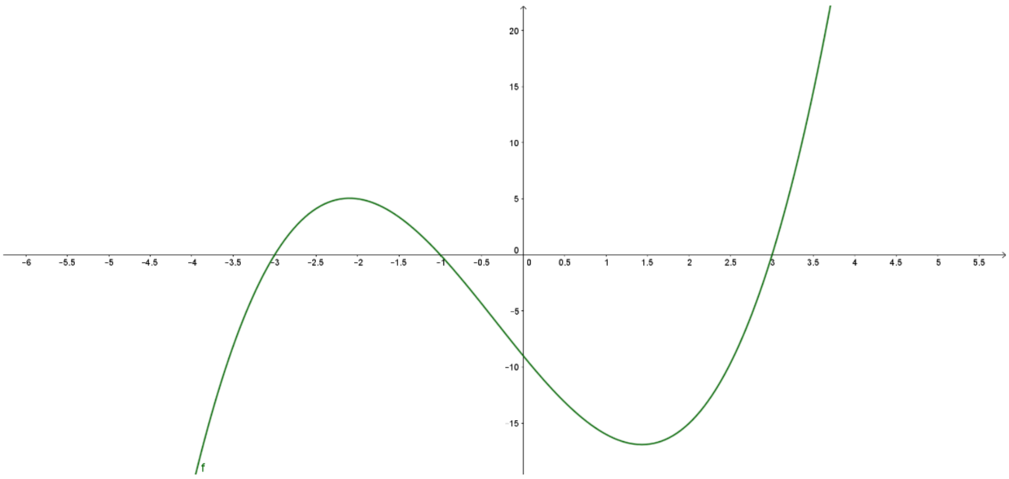
(2) Links van x = -2 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief

(3) Rechts van x = 1,5 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief

(4) Tussen x = -2 en x = 1,5 is de grafiek dalend. Dus f'(x) is negatief.

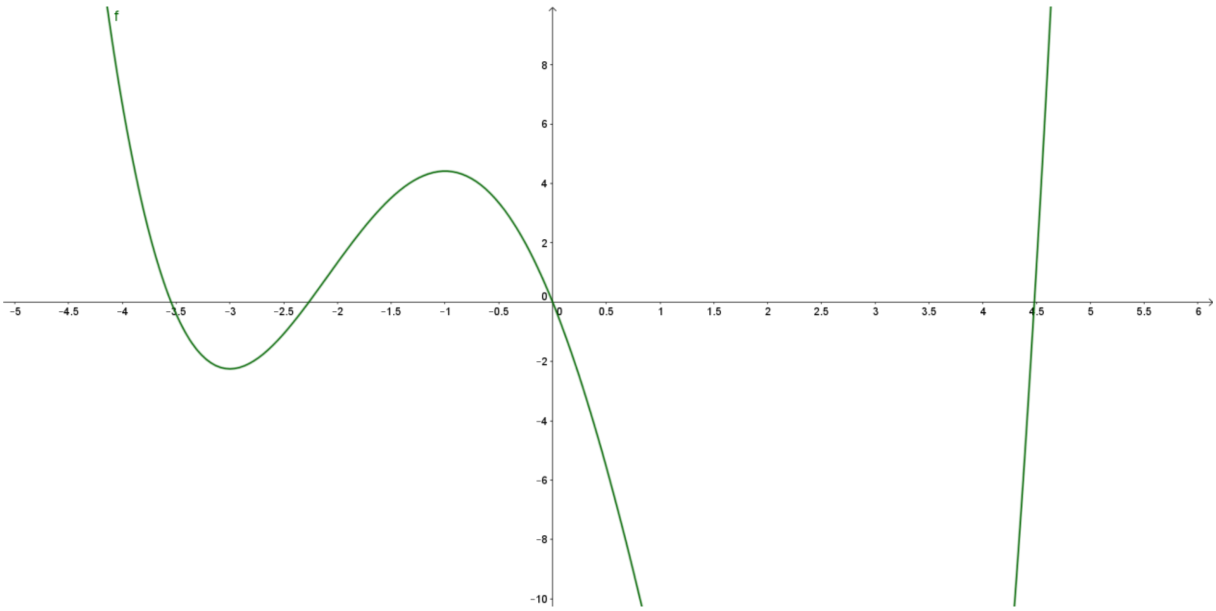
Dit geeft :





b. **(1)** Waar g’(x) = 0 zijn bij g(x) toppen. Dus bij x = -3, x = -1 en x = 3.
(2) Links van x = -3 en tussen -1 en 3 is g’(x) is negatief. Dus is de grafiek daar dalend.
(3) Rechts van x = 3 en tussen -3 en -1 is g’(x) is positief. Dus is de grafiek daar stijgend.

Dit geeft :



PARAGRAAF 2.3 : LIMIET EN AFGELEIDE

LES 1 : PERFORATIES EN LIMIETEN

THEORIE

(1) Limiet = { Getal waar de formule naar toe gaat (maar soms nooit komt) }

(2) $\lim\limits_{x \to 4}(\ldots)$ = { Limiet voor x gaat naar 4 }

(3) Limiet bereken :

- **i.** Vul het getal in en bereken de uitkomst. Als er echter $\frac{0}{0}$ uitkomt, moet je een factor wegdelen.
- **ii.** Ga naar stap i.

(4) Perforatie = { Gat in de grafiek }

(5) Perforatiepunt = { coördinaten van het gat in de grafiek }

(6) Bereken van een perforatie van $f(x)$

- **i.** Er geldt : Teller = 0 én Noemer = 0 (stel dit is in x = 7)
- **ii.** Bereken het perforatiepunt door te berekenen $y = \lim\limits_{x \to 7} f(x)$.

  Het perforatiepunt is dan $P = (7, y)$

VOORBEELD 1

Bereken de volgende limieten

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 4)$

b. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - x - 20}{2x - 10}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x} =$

OPLOSSING 1

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 4) = 2 \cdot 3 + 4 = 10.$ (Dus de limiet is 10)

b. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - x - 20}{2x - 10} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+4)}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} (x + 4) = 9$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x-3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x - 3) = 0 - 3 = -3$

VOORBEELD 2

Bereken van de volgende formules of ze een perforatie hebben. Zo ja, geef de coördinaten van het perforatiepunt.

a. $f(x) = \frac{x-5}{x+5}$

b. $g(x) = \frac{x^2-x-20}{x-5}$

c. $h(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-25}$

OPLOSSING 2

a. $T = 0$ en $N = 0$

$x - 5 = 0$ en $x + 5 = 0$

$x = 5$ en $x = -5$

Er is geen perforatie omdat ze allebei een verschillende waarde opleveren.

b. $T = 0$ en $N = 0$

$x^2 - x - 20 = 0$ en $x - 5 = 0$

$(x-5)(x+4) = 0$ en $x = 5$

$x = 5 \ v \ x = -4$

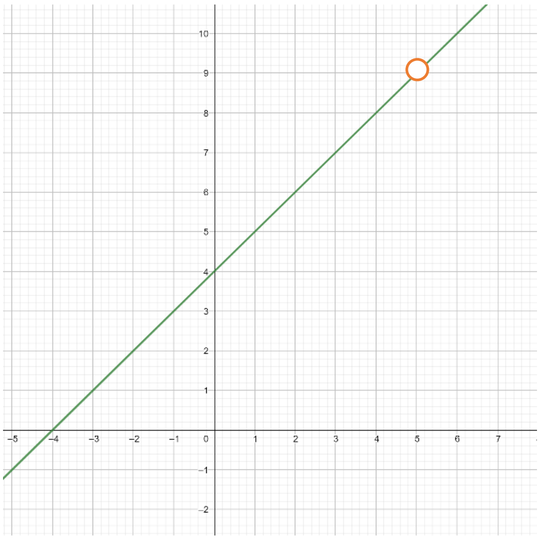
Er is dus een perforatie bij x=5

Nu het perforatiepunt berekenen

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-x-20}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+4)}{x-5} = \lim_{x \to 5} (x+4) = 9.$$

Er zit een gat in de grafiek van $y = x + 4$.

Het perforatiepunt is $P = (5,9)$.



c. $T = 0$ en $N = 0$

$x^2 - 5x = 0$ en $x^2 - 25 = 0$

$x(x-5) = 0$ en $x^2 = 25$

$x = 0 \ v \ x = 5$ en $x = 5 \ v \ x = -5$

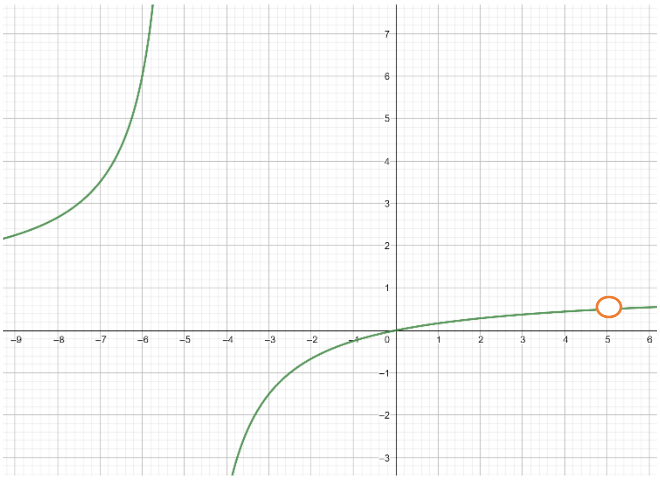
Er is dus een perforatie bij x=5.

Nu het perforatiepunt berekenen

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-25} = \lim_{x \to 5} \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Er zit een gat in de grafiek van $y = \frac{x}{x+5}$.

Het perforatiepunt is $P = (5\,, \frac{1}{2})$.



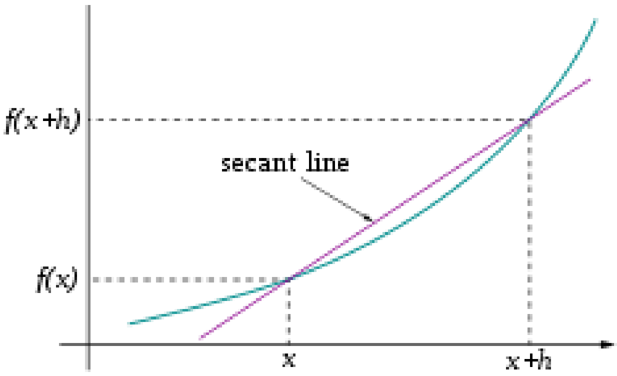
LES 2 : HELLINGFUNCTIE MET LIMIET

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $y(x) = x^2 + 3$.

a. Bereken de helling in x = 6 met de limietdefinitie.

b. Bereken de hellingfunctie met de limietdefinitie.



OPLOSSING 1

Maak eerst een schets (zie hiernaast). We nemen een heel klein getal h.

a. We gaan eerst de helling in x=6 berekenen.

(1) Helling op interval $[6\,,6+h]$ $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_{6+h} - y_6}{(6+h)-6} = \dfrac{y_{6+h} - y_6}{h}$

(2) Eerst de y-coördinaten berekenen :

$$y(6+h) = (6+h)^2 + 3 = 6^2 + 2\cdot 6\cdot h + h^2 + 3 = h^2 + 12h + 39$$
$$y(6) = 6^2 + 3 = 39$$

(3) Helling op interval [6 , 6+h] =

$$f\,'(6) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 + 12h + 39 - 39}{h} = \frac{h^2 + 12h}{h} = \frac{h(h+12)}{h} = h + 12$$

(4) Omdat h heel klein is geldt :

$$f\,'(6) = \lim_{h\to 0} \quad h + 12 = 12$$

(5) Dus de helling in $x = 6$ is $f'(6) = 12$.

b. Nu hetzelfde voor een willekeurige x :

(1) Dan geldt voor iedere x dat

Helling op interval $[x\,, x+h]$ $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_{x+h} - y_x}{(x+h)-x} = \dfrac{y_{x+h} - y_x}{h}$

(2) Eerst de y-coördinaten berekenen :

$y(x+h) = (x+h)^2 + 3 = x^2 + 2xh + h^2 + 3$

(3) Dan geldt dat de helling op interval [x , x+h] =

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3 - (x^2+3)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Omdat h heel klein is geldt :

$$\lim_{h \to 0} \quad 2x + h = 2x$$

(4) Dus voor iedere x geldt dat de hellingfunctie $y\,'(x)$ gelijk is aan $y\,'(x) = 2x$.

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

a. Bereken de helling in $x = 13$

b. Bereken de helling in $x = -7$

OPLOSSING 2

a. helling in $x = 13$ is

$f\,'(13) = 2 \cdot 13 = 26$

b. helling in $x = -7$ is

$f'(-7) = 2 \cdot -7 = -14$

LES 3 : DIFFERENTIËREN

Als je iedere keer de hellingfunctie moet bepalen, dan is dat erg veel werk. Dit is al door iemand gedaan. Deze techniek heet differentiëren.

DEFINITIES

- Differentiëren = { Hellingfunctie berekenen }
- Afgeleide bepalen = { Hellingfunctie berekenen }

DIFFERENTIEERREGELS

(1) Hoofdregel differentiëren :	$f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f\,'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
(2) Hulpregel 1 :	$f(x) = a \cdot x \rightarrow f\,'(x) = a$
(3) Hulpregel 2 :	$f(x) = a \quad \rightarrow f\,'(x) = 0$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 6x^4$

b. $f(x) = 4x + 7$

c. $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 6x - 3$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2)$

e. $f(x) = ax^2 + 3x + 2a$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 4 \cdot 6 \cdot x^{4-1} = 24x^3$

b. $f'(x) = 4 + 0 = 4$

c. $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 6$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2) = 18x^2 + 6x - 42x^3 - 14x^2$

$f(x) = -42x^3 + 4x^2 + 6x$

$f'(x) = -126x^2 + 8x + 6$

e. $f'(x) = a \bullet 2x + 3 + 0 = 2ax + 3$

PARAGRAAF 2.4 : PRODUCTREGEL (PR) EN QUOTIËNTREGEL (QR)

LES 1 : PRODUCT EN QUOTIËNTREGEL

HULPREGELS DIFFERENTIËREN

Er zijn (voorlopig) twee hulpregels bij differentiëren :

(1) Productregel : $h = f \cdot g \rightarrow h' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(2) Quotiëntregel : $f = \frac{t}{n} \rightarrow f' = \frac{n \cdot t' - t \cdot n'}{n^2} = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2}$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $h(x) = x^2(3x + 5)$

b. $f(x) = \frac{3x-4}{-2x+9}$

OPLOSSING 1

a. $f = x^2 \quad \rightarrow f' = 2x$

$g = 3x + 5 \quad \rightarrow g' = 3$

$h'(x) = 2x(3x + 5) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 + 10x + 3x^2 = 9x^2 + 10x$

b. $t = 3x - 4 \quad \rightarrow t' = 3$

$n = -2x + 9 \rightarrow n' = -2$

$$f'(x) = \frac{(-2x+9) \cdot 3 - (3x-4) \cdot -2}{(-2x+9)^2} = \frac{-6x+27-(-6x+8)}{(-2x+9)^2} = \frac{19}{(-2x+9)^2}$$

LES 2 : VRAGEN OVER DE AFGELEIDE

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 9x^2 + 36x$.

a. Bereken algebraïsch de helling in $x = 3$.

b. Bereken algebraïsch de coördinaat waar de helling gelijk is aan -9.

c. Bereken algebraïsch de raaklijn in $x = 2$.

d. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 18x + 36$

Helling in x=3 is : $f'(3) = 18 \cdot 3 + 36 = 90$

b. $f'(x) = -9$ dus $18x + 36 = -9$

$18x = -45$

$x = -2½$

$y = f(-2½) = 9(-2½)2 + 36(-2½) = -33\frac{3}{4}$

Coördinaat $A = (-2½, -33\frac{3}{4})$

c. Neem het stappenplan erbij. Alleen stap 3 kan nu sneller :

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(2) = 108$

(3) $f'(x) = 18x + 36$

$a = f'(2) = 72$

(4) Je weet $y = 72x + b$.

Invullen van $(2,108)$ geeft :

$108 = 72 \cdot 2 + b$

$b = -36$

(5) Dus raaklijn : $y = 72x - 36$

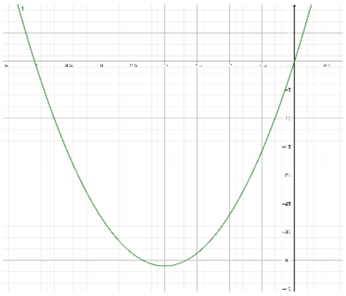
d. In de top geldt : HELLING = 0 → $f'(x) = 0$

$f'(x) = 18x + 36 = 0$

$18x = -36$

$x = -2$

$y = f(-2) = -36.$



Dus de top is $(-2, -36)$

Dit is een minimum (dalparabool)

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn m evenwijdig is met de lijn $l:\ y = -6x + 8$

OPLOSSING 2

Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van B.

(1) $a = r.c. = -6$

Dus $f\,'(x) = -6$

(2) $f'(x) = 2x - 2 = -6$

$2x = -4$

$x = -2$

Dus $y = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot -2 + 3 = 11$

Dus $B = (-2{,}11)$